

# Fourier polynomials

A Fourier polynomial is an expression of the form

$$F_N(x) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

The constants  $a_0, a_k, b_k, k = 1, \dots, N$  are called coefficients of  $F_N(x)$ . The Fourier polynomials are  $2\pi$ -periodic functions.

The coefficients of the Fourier polynomial are evaluated with the use of Fourier's idea consisting in multiplying the Fourier polynomial by terms  $\cos(kx)$  and  $\sin(kx)$ . The formulas for the coefficients of the Fourier polynomial are as follows

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F_N(x) dx \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F_N(x) \cos(kx) dx, \quad 1 \leq k \leq N \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F_N(x) \sin(kx) dx, \quad 1 \leq k \leq N \end{aligned}$$

## Fourier series for periodic functions

Let  $x(t)$  be a real integrable periodic signal of period  $T$ , where  $t$  is the continuous time. The integrable function is such function that integral exists. The signal is called periodic if

$$x(t) = x(t + T)$$

For a function that is integrable on  $[0, T]$ , the numbers

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos(2\pi kt/T) dt, \quad b_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \sin(2\pi kt/T) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

are called the Fourier coefficients of  $x(t)$ . The partial sums of the Fourier series for  $x(t)$  are denoted

$$(S_N x)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N [a_k \cos(2\pi kt/T) + b_k \sin(2\pi kt/T)], \quad N \geq 0$$

The partial sums are trigonometric polynomials. It is expected that the functions  $S_N x$  approximate the function  $x(t)$  and that the approximation improves as  $N$  tends to infinity. The infinite sum

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(2\pi kt/T) + b_k \sin(2\pi kt/T)]$$

is called the Fourier series of  $x(t)$ .

# Exponential Fourier series and the Dirac comb

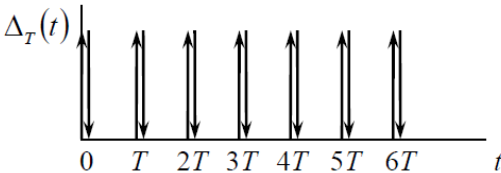
The exponential Fourier series is the infinity sum of the form

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k \exp\left(j \frac{2\pi}{T} kt\right)$$

where the Fourier coefficients are given by

$$F_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp\left(-j \frac{2\pi}{T} kt\right) dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

The Dirac comb (also known as an impulse train and sampling function) is the integrable periodic function

$$\Delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$


which can be represented as the Fourier series. The Fourier coefficients  $F_k$  for the Dirac comb are

$$F_k = \frac{1}{T} \int_0^T \delta(t) \exp\left(-j \frac{2\pi}{T} kt\right) dt = \frac{1}{T} \exp(-j0) = \frac{1}{T}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

All Fourier coefficients are equal to the same value, therefore,

$$\Delta_T(t) = \sum_n \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left(j \frac{2\pi}{T} kt\right)$$

## FOURIEROVA TRANSFORMÁCIA

Fourierova transformácia (ďalej len FT), ktorá nám prevedie signál z časovej oblasti do frekvenčnej. Tým nám umožní získať prehľad o tom, v akom frekvenčnom rozsahu sa náš signál pohybuje a aké zložky (nežiadúce) obsahuje. FT sa riadi základnými transformačnými vzťahmi:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (9.0)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (9.1)$$

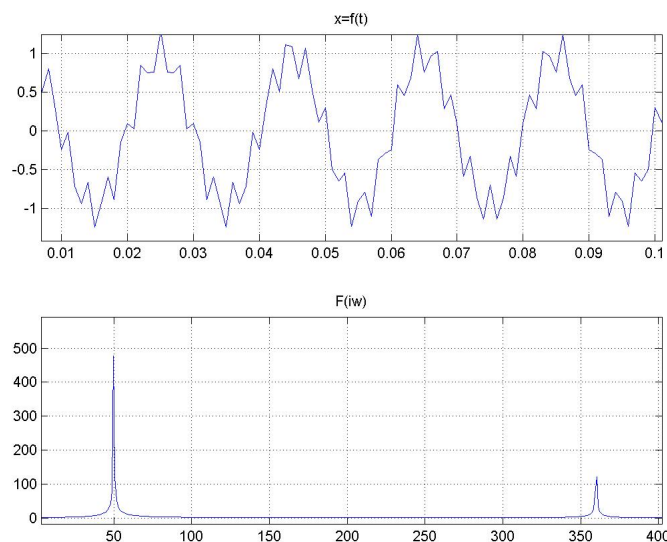
kde  $x(t)$  je časový signál,  $X(\omega)$  je signál vo frekvenčnej oblasti a  $\omega$  je uhlová frekvencia. Vzťah (9.0) platí pre priamu FT a vzťah (9.1) pre inverznú FT. Obdobne platia dva vzťahy pre FT diskrétného signálu:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\Omega}, \quad (9.2)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega} d\Omega. \quad (9.3)$$

Týmto postupom dostaneme napríklad zo signálu, skladajúceho sa z dvoch sínusových priebehov vo frekvenčnej oblasti dva zvislé peaky (vrcholy), ktorých výšky sú úmerné amplitúdam časových signálov a ich umiestnenie na osi  $\omega$  definuje frekvenciu časového signálu (obr. 9.1).

Na Fourierovu transformáciu signálu v Matlabe existuje príkaz `fft`, ktorý po zadaní požadovaných parametrov (vzorky časového priebehu signálu a počet vzoriek v makrobloku) prevedie funkciu z časovej oblasti do frekvenčnej.



Obr. 9.1 Fourierova transformácia časového harmonického signálu (50Hz+360Hz)

Vibroakustické časové signály  $s(t)$  sa môžu vyhodnotiť v časovej oblasti, ale spravidla sa im priradujú ich obrazy  $S(f)$  vo frekvenčnej oblasti. Medzi pôvodným signálom a jeho obrazom platia vzťahy priamej a inverznej Fourierovej transformácie

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i2\pi f t} dt, \quad (4.1)$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi f t} df. \quad (4.2)$$

Z rôznych druhov signálov sa najčastejšie používa harmonický a periodický signál.

Harmonický signál je v tvare kosínusoidy (obr.4.1)

$$s(t) = A \cos(2\pi f_0 t). \quad (4.3)$$

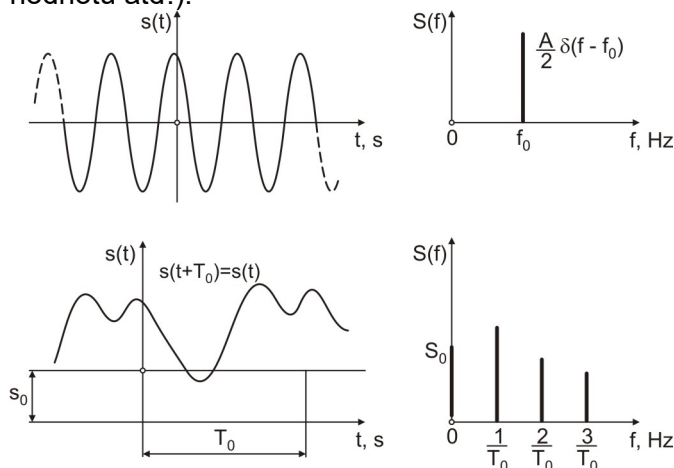
Fourierovou transformáciou dostaneme (s použitím Eulerových vzťahov)

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cos(2\pi f_0 t) e^{-i2\pi f t} dt = \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i2\pi f_0 t} + e^{-i2\pi f_0 t}] e^{-i2\pi f t} dt =$$

$$= \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{i2\pi(f-f_0)t} + e^{-i2\pi(f+f_0)t} \right] dt = \frac{A}{2} \delta(f-f_0) + \frac{A}{2} \delta(f+f_0). \quad (4.4)$$

Periodický signál sa môže rozložiť pomocou Fourierovho radu na jednotlivé harmonické zložky, ktorých amplitúdy sú dané tvarom príslušného periodického signálu. Transformácia týchto signálov z časovej oblasti do frekvenčnej oblasti, ktoré sú zobrazené v súradniciach amplitúda – frekvencia je na obr.4.1.

Pri jednoduchých časovo sa meniacich priebehoch, ktoré sa skladajú z určitého počtu diskretných harmonických zložiek známej amplitúdy a fázy a ktoré neobsahujú zložky významného náhodného kmitania alebo otrasov, možno pomocou Fourierovej analýzy s presne stanovenými matematickými vzťahmi uvádzať vzájomné vzťahy rôznych základných veličín (napr. výchylku, rýchlosť, zrýchlenie, výkmit, efektívnu hodnotu, priemernú hodnotu atď.).



### 5.3.1.1 Význam Fourierovej analýzy, časový a frekvenčný rozsah

Fourierova transformácia sa stala najvýznamnejším prostriedkom digitálnej experimentálnej analýzy signálu. Pri analýze signálu je snaha vyjadriť zložité funkcie jednoduchšími, pričom je vhodné ľubovoľnú funkciu  $x(t)$  nahradiť súčtom harmonických funkcií. Pre periodické funkcie sa takáto transformácia nazýva Fourierova.

Ak uvažujeme periodickú funkciu

$$x(t) = x(t + nT) \quad n = 1, 2, \dots$$

s periódou  $T$ , potom uvedenú funkciu možno vyjadriť konečným alebo nekonečným súčtom harmonických funkcií s frekvenciami  $f_k = k \cdot f_1$  v tvare

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k), \quad (5.24)$$

prítom  $A_0/2$  je absolútny člen,

$A_k$  - amplitúda  $k$ -tej harmonickej  $x_k(t)$ ,

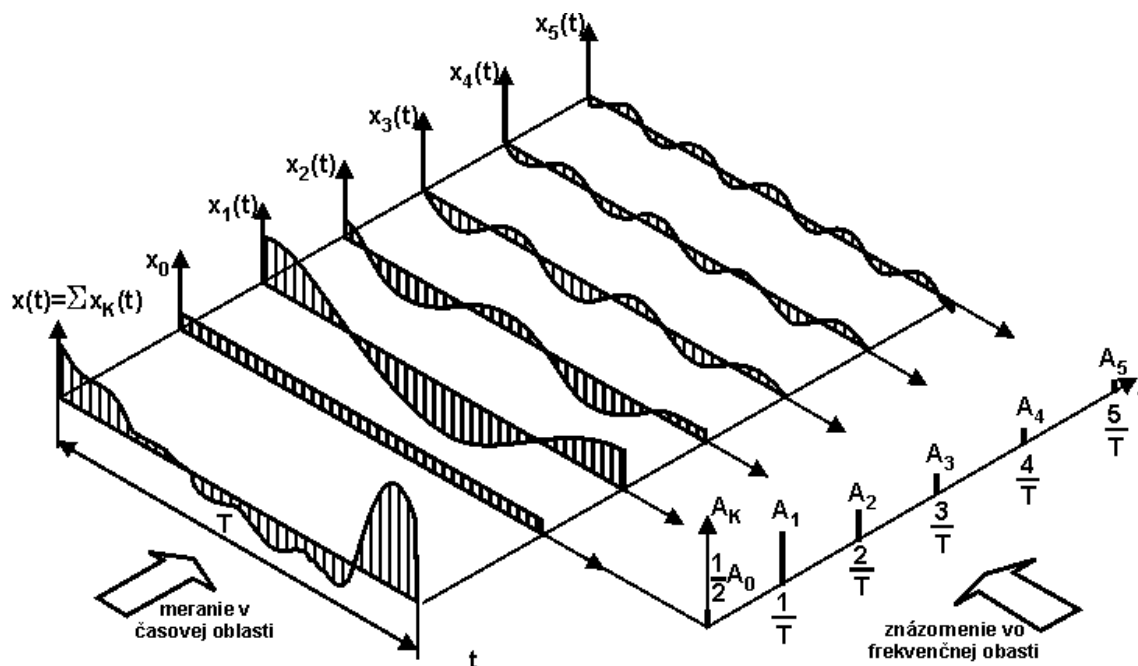
$\varphi_k$  - fázový uhol  $k$ -tej harmonickej  $x_k(t)$ ,

$f_1 = 1/T$  - základná frekvencia.

Výraz (5.24) je reálny Fourierov rad funkcie  $x(t)$ . Na obr.5.19 je rozloženie funkcie  $x(t)$  na päť prvých harmonických.

Pretože časový priebeh harmonických funkcií je známy, môžeme časovú nezávislú premennú nahradiť frekvenciami, odpovedajúcimi časovým priebehom, čím dostaneme

znázornenie vo frekvenčnom rozsahu (obr.5.19). Vyjadrenie vo frekvenčnom rozsahu nám však nedáva žiadnu informáciu o fázových uhloch  $\varphi_k$ .



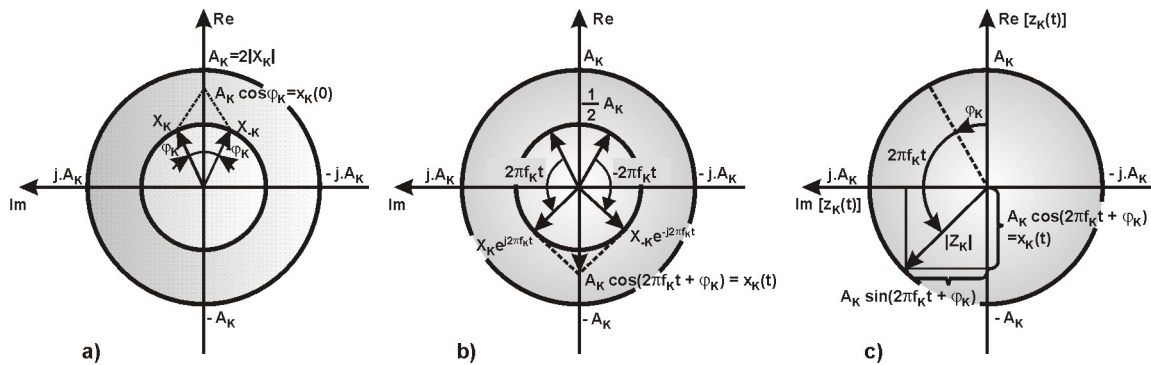
Pretože platí  $\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha})$ , z (5.24) dostaneme

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_k \left[ e^{j(2\pi f_k t + \varphi_k)} + e^{-j(2\pi f_k t + \varphi_k)} \right] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} A_k e^{j(2\pi f_k t + \varphi_k)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k} \cdot e^{j2\pi f_k t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi f_k t}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Výraz (5.25) udáva komplexný Fourierov rad a  $X$  je komplexný koeficient, ktorý má amplitúdu  $\frac{A_k}{2}$   $k$ -tej harmonickej  $x_k(t)$  a príslušný fázový uhol  $\varphi_k$ .

Vzhľadom k sumácii  $\langle -\infty, +\infty \rangle$  vystupujú v rade (5.25) len konjugované komplexné hodnoty  $X_k^* = X_{-k}$ . V dôsledku toho sa všetky imaginárne zložky zrušia.

Komplexný Fourierov rad môžeme vyjadriť názorne. Ku každej frekvencii  $f_k$  prislúcha konštantná komplexná amplitúda  $X_k$ . Táto amplitúda sa dá, ako každé komplexné číslo, vyjadriť graficky v komplexnej rovine. Faktor  $e^{j2\pi f_k t}$  vzhľadom na rovnomerne rastúci čas  $t$ , sa dá modelovať rotáciou vektora proti otáčaniu hodinových ručičiek. Faktor  $e^{-j2\pi f_k t}$  rotuje v smere otáčania hodinových ručičiek. Na obr.5.20 sú znázornené oba konjugované komplexné členy radu s indexami  $k$  a  $-k$ , ako aj ich stály reálny geometrický súčet v komplexnej rovine.



Obr.5.20 Znáznorenie okamžitých hodnôt  $k$  – tej harmonickej  $x(t)$  pomocou rotujúceho vektora v komplexnej rovine; a) ako súčet dvoch konjugovaných komplexných vektorov pre  $t = 0$  ; b) ako súčet dvoch konjugovaných komplexných vektorov pre ľubovoľné  $t$  ; c) ako reálna časť komplexného vektora pre ľubovoľné  $t$

Pre časové okamžiky  $t = 0, T, 2T, \dots$  nadobúda exponenciálna funkcia  $e^{\pm j 2 \pi f_k t}$  reálne hodnoty  $+1$ . Hodnota  $x(0)$  je preto reálnym súčtom koeficientov  $X_k$

$$x(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k.$$

Popísaný postup je obzvlášť vhodný pre znázornenie komplexného Fourierového radu a spektrálnej analýzy periodických signálov.

Pre určité prípady použitia je bežné a účelné, použiť komplexné vyjadrenie pomocou obr.5.20c.  $k$  – ta harmonickej je tu chápaná tak, že reálna funkcia  $x_k(t) = A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k)$  je reálna časť komplexnej funkcie

$$z_k(t) = A_k e^{j(2\pi f_k t + \phi_k)} = A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k) + j A_k \sin(2\pi f_k t + \phi_k).$$

Pretože

$$z_k(t) = A_k e^{j\phi_k} \cdot e^{j2\pi f_k t}, \text{ môžeme písať}$$

$$z_k(t) = Z_k \cdot e^{j2\pi f_k t},$$

kde  $Z_k$  je komplexná amplitúda harmonickej kmitania.

Medzi veličinami  $A_k$ ,  $X_k$  a  $Z_k$  je súvis vyjadrený vzťahom

$$A_k = |Z_k| = 2 |X_k|.$$

Ďalej podľa obr.5.20b, a 5.20c je

$$x_k(t) = \frac{1}{2} z_k(t) + \frac{1}{2} z_k^*(t) = R_e \{ z_k(t) \},$$

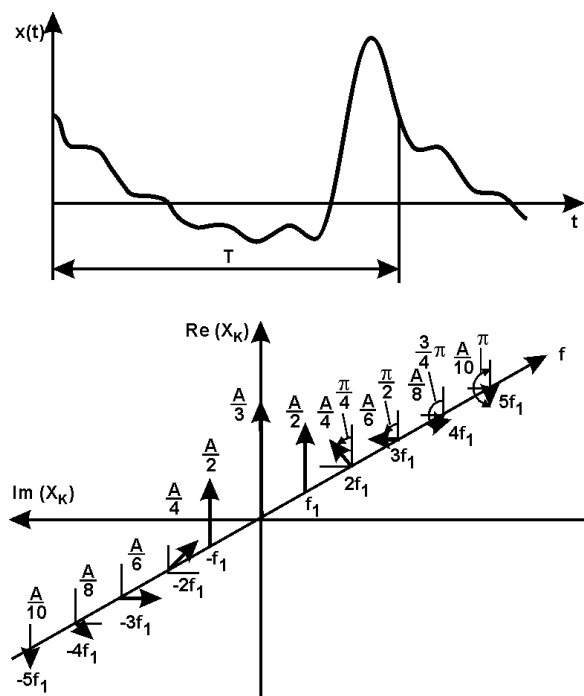
pričom  $z_k^*(t)$  je konjugovaná komplexná veličina ku  $z_k(t)$ .

Množina  $X_k$  ( $k = -\infty, \dots, +\infty$ ) sa nazýva dvojstranné komplexné amplitúdové spektrum  $X(t)$  periodickej časovej funkcie  $x(t)$ . Ako funkcia frekvencie  $X(f_k) = X_k$  je definovaná len na miestach  $f = f_k$ . Jedná sa preto o diskrétné spektrum. Na obr.5.21 sú tieto závislosti

znázornené na príklade reálnej periodickej funkcie z obr.5.19. Časová funkcia má pre  $A_0 = A/3$ ,  $A_k = A/k$  tvar

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{3} A + \sum_{k=1}^5 \frac{A}{k} \cos \left[ 2\pi k f_1 t + (k-1) \frac{\pi}{4} \right] \\ &= \frac{1}{3} A + A \cos 2\pi f_1 t + \frac{1}{2} A \cos \left( 4\pi f_1 t + \frac{\pi}{4} \right) \\ &\quad + \frac{1}{3} A \cos \left( 6\pi f_1 t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{4} A \cos (8\pi f_1 t + 3\pi/4) \\ &\quad + \frac{1}{5} A \cos (10\pi f_1 t + \pi). \end{aligned}$$

Znázornenie v spodnej časti obr.5.21 odpovedá okamžitému stavu rotujúcich vektorov v čase  $t = 0, T, 2T$  atď. Pre každý iný časový okamžik zaujmú vektory inú polohu a sice takú, že geometrický súčet všetkých vektorov stále dáva reálnu hodnotu  $x(t)$ . Obidve znázornenia na obr.5.21 sú teda úplne rovnocenné.



Obr.5.21 Časová funkcia komplexného amplitúdového spektra periodického signálu  $x(t) = A/3 + A \cos 2\pi f_1 t + \dots$

Komplexne koeficienty  $X_k$  určíme podľa vzorca

$$X_k = \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi f_k t} dt. \quad (5.26)$$

Rovnica (5.26) jednoznačne priradzuje reálnej periodickej funkcii času  $x(t)$  diskrétné obojstranné komplexné amplitúdové spektrum, ktoré je definované len na miestach  $f = f_k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) funkciou  $X(f)$ .  $X(f)$  je Fourierov integrál, fourierovský obraz funkcie  $x(t)$ .

Celkový výkon náhodného kmitania je rovný súčtu výkonov jednotlivých harmonických zložiek tohto kmitania. Veličina  $x^2(t)$  sa nazýva okamžitý výkon kmitania. Stredný výkon periodického signálu je definovaný vzťahom

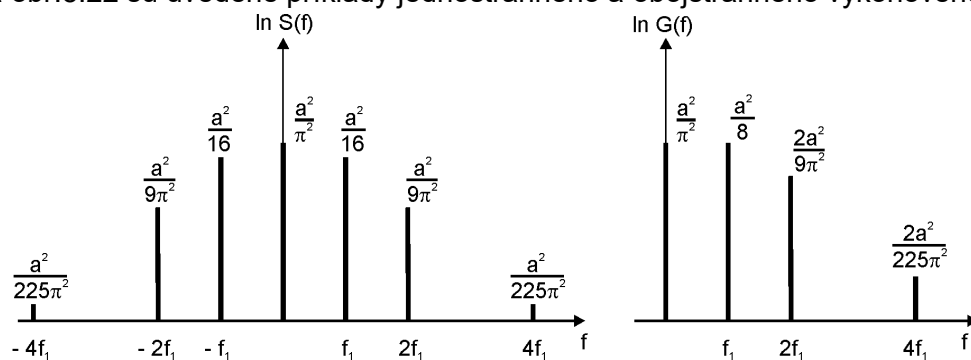
$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^* X_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k^2}{4}.$$

Pritom  $X_k^*$  je komplexná veličina konjugovaná k  $X_k$ . Znalosť koeficientov  $X_k$  dovoľuje vypovedať o rozložení výkonu signálu na jednotlivé frekvencie  $f_k$ . Súhrn všetkých  $|X_k|^2$  sa nazýva obojstranné výkonové spektrum funkcie  $x(t)$ . Označuje sa  $S(f)$ . Hodnoty výkonového spektra sú stále reálne.  $S(f_k)$  je, rovnako ako  $X(f_k)$ , definované len pre  $f = f_k$ . Pretože  $|X_k| = |X_{-k}|$ , väčšinou sa uvažuje iba jednostranné výkonové spektrum  $G(f) = 2S(f)$ , pričom

$$G(f_k) = 2S(f_k) = \frac{1}{2} A_k^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$G(0) = \frac{1}{4} A_0^2 = X^2(0) = X_0^2.$$

Na obr.5.22 sú uvedené príklady jednostranného a obojstranného výkonového spektra.



Obr.5.22 Obojstranné a jednostranné výkonové spektrum signálu

### 5.3.1.3 Fourierová transformácia

Fourierova transformácia sa dá ľahko názorne objasniť aplikáciou rozvoja do Fourierovho radu na neperiodickú funkciu. Dĺžka periódy bude teraz nekonečne dlhá ( $T \rightarrow \infty \Rightarrow f_1 \rightarrow 0$ ) a hodnoty  $k f_1 = \frac{k}{T}$  ležia v dôsledku toho nekonečne husto na frekvenčnej

osi. Preto považujeme frekvencie za spojito premenlivé ( $k f_1 \rightarrow f$ ) a hodnotu  $\frac{1}{T}$  nahradzujeme  $df$ . Ak tieto hraničné situácie zavedieme do rovnice (5.26) budú hodnoty  $X_k$  amplitúdového spektra  $X(f)$  diferenciálne malé, pretože výkon signálu sa musí rozdeliť na nekonečne veľa frekvenčných čiar.

Aby sme napriek uvedenému dostali konečné hodnoty, delíme tieto komplexné amplitúdy  $X(f)$  diferenciálne malým frekvenčným intervalom  $df$ , a funkciu



$$\hat{X}(f) = \frac{X(f)}{df}$$

nazveme Fourierovým spektrom funkcie  $x(t)$ , alebo obojstrannou amplitúdovou spektrálnou hustotou.

Rovnice (5.26) a (5.25) prejdú potom na tvar

$$\hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt, \quad (5.27)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} df, \quad (5.28)$$

pričom  $\hat{X}(f)$  je komplexná funkcia definovaná na celej frekvenčnej osi  $-\infty < f < \infty$ .

Ďalej platí

$$\hat{X}(f) = \hat{X}^*(-f).$$

Rovnica (5.27) udáva Fourierovu transformáciu. Rovnica (5.28) je prislúchajúca spätná transformácia (inverzná transformácia). Obidve rovnice tvoria tzv. Fourierovský pár, čo symbolicky vyjadrujeme vzťahom

$$\hat{X}(f) = \Phi\{x(t)\}, \quad x(t) = \Phi^{-1}\{X(f)\}. \quad (5.28a)$$

Funkcia  $\hat{X}(f)$  definuje frekvenčné spektrum originálu  $x(t)$  ako komplexnú veličinu.

Matematicky predstavuje Fourierova transformácia integrálnu transformáciu s jadrom  $K(f, t) = e^{-j2\pi ft}$ . Dostatočnou podmienkou pre použitie Fourierovej transformácie na funkcie

$x(t)$  je existencia integrálu  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$ . Tento predpoklad je pri vyhodnotení reálnych

procesov stále splnený, pretože v dôsledku konečne dlhých meracích časov sú integračné hranice konečné.

Ak realizujeme Fourierovu transformáciu na signál  $x_T(t)$  z časového intervalu  $[-T/2, T/2]$ , pričom funkcia  $x(t)$  je definovaná na celej časovej osi, označujeme ju  $X_T(f)$ , pričom platí

$$X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-j2\pi ft} dt.$$

Reálnej funkcii času  $x(t)$  prostredníctvom Fourierovej transformácie priradíme komplexnú funkciu  $X(f)$  na frekvenčnej osi a naopak. Fourierová transformácia teda sprostredkuje prechod z časovej na frekvenčnú oblasť.

Párne funkcie  $[x(t) = x(-t)]$  majú v dôsledku  $\hat{X}^*(-f) = \hat{X}(f)$  čisto reálnu, nepárne  $[x(t) = -x(-t)]$  čisto imaginárnu amplitúdovú spektrálnu hustotu.

Amplitúdová spektrálna hustota (Fourierovo spektrum) je objasnená len pre deterministické funkcie. Pre stochastické časové priebehy nastávajú problémy. Preto sa

namiesto (komplexnej) amplitúdy  $X(f)$  uvažuje (reálny) výkon  $S(f)$  pre určenie obojstrannej výkonovej spektrálnej hustoty

$$\hat{S}(f) = \frac{S(f)}{df}.$$

Medzi výkonovou spektrálnou hustotou  $\hat{S}(f)$  a amplitúdovou spektrálnou hustotou  $\hat{X}(f)$  (Fourierovým spektrom) platí vzťah

$$\hat{S}(f) = \hat{S}_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\hat{X}_T(f)|^2}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\hat{X}_T^*(f) \hat{X}_T(f)}{T}. \quad (5.29)$$

Pritom  $T$  je čas vybratého úseku signálu. Indexy  $xx$  vyjadrujú, že výraz  $\hat{S}(f)$  je tvorený z časovej funkcie  $x(t)$ . Pre stacionárne stochastické časové funkcie  $x(t)$  je potrebné uvažovať s vytvorením strednej hodnoty pre odhad očakávanej hodnoty.

Pretože  $\hat{X}(f) = \hat{X}^*(-f)$  je  $\hat{S}_{xx}(f)$  párna funkcia  $\hat{S}_{xx}(f) = \hat{S}_{xx}(-f)$ , takže stačí poznať  $\hat{S}_{xx}(f)$  pre  $f \geq 0$ . Preto sa často udáva jednostranná výkonová spektrálna hustota

$$\hat{G}_{xx}(f) = 2 \hat{S}_{xx}(f), \quad f > 0. \quad (5.30)$$

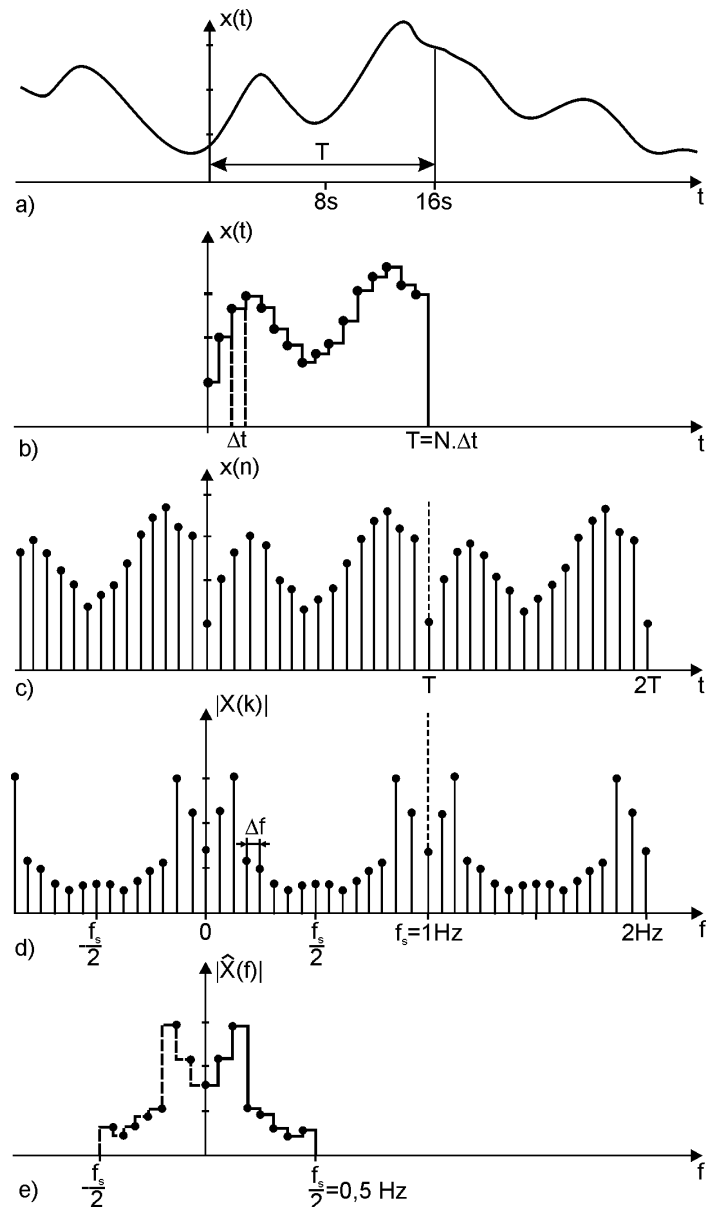
Pre  $f = 0$  platí  $\hat{G}_{xx} = \hat{S}_{xx}(0)$ .

Reálne funkcie  $\hat{S}_{xx}(f)$  a  $\hat{G}_{xx}(f)$  neobsahujú žiadne informácie o fáze.

Pre popísanie signálov a systémov sa používajú okrem uvedených spektier (amplitúdová spektrálna hustota, výkonová spektrálna hustota) ďalšie charakteristické funkcie (autokorelačná funkcia, váhová funkcia, prenosová funkcia, prechodová funkcia a pod.). Sú to funkcie odvodené z časovej funkcie, pričom slúžia pre charakteristiku signálov alebo systémov. Nevýhodou však je, že pri vytváraní charakteristických funkcií sa môže stratiť časť informácií obsiahnutých v signále. Podrobnejší popis týchto funkcií je napr. v [34].

### 5.3.2 Diskrétna Fourierova transformácia (DFT)

Postup bude ukázaný na príklade s časom merania  $16 \text{ s}$  a s diskretizáciou  $\Delta t = 1 \text{ s}$  (obr.5.23). Digitálny merací postup dáva hodnoty v tvare konečných hodnôt v určitom diskretnom čase. Z priebehu na obr.5.23a, dostaneme diskkrétne hodnoty z intervalu  $T$ , pričom ich počet je  $N = \frac{T}{\Delta t} = T f_s$ .  $N$  udáva časovú postupnosť,  $f_s$  je vzorkovacia frekvencia.



Obr.5.23 Vysvetlenie diskretnej Fourierovej transformácie

- a) reálna časová funkcia, b) diskretizácia v intervale  $T$  na  $N$  hodnôt s frekvenciou  $f_s = 1/\Delta t$ , c) vytvorenie periodickej diskretnej postupnosti, d) Fourierova transformácia do obojstranného periodickeho čiarového spektra  $X(k)$ , e) náhrada amplitúdovej spektrálnej hustoty časovej funkcie  $x(t)$  vo frekvenčnej oblasti  $0 \leq f \leq f_s/2$  pomocou spektrálnych hodnôt  $X(k)$ ,  
 $k \in \langle -N/2 + 1, N/2 - 1 \rangle$ , pričom  $X(k) = X^*(-k)$ .

Na obr.5.23b, je diskretná funkcia znázornená stupňovitou funkciou. Mimo tohto intervalu je funkcia spočiatku nulová. Po diskretizácii je celá funkcia  $x(t)$  reprezentovaná len  $N$  hodnotami tzv. vzorkovacej funkcie  $x_s(t)$ . Ak by sme takúto funkciu chceli podrobiť Fourierovej transformácii podľa (5.27), mali by sme dostať spojitú funkciu  $X(f)$  definovanú na celej frekvenčnej osi. Pri digitálnom spracovaní údajov však očakávame aj výsledok v diskretnej forme, t. j. v tvare diskretných spektrálnych hodnôt

$$X(k \Delta f) = X(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Z Fourierovho radu vieme, že diskkrétne spektrum dáva len periodická funkcia. Ak teda chceme výsledok vyjadriť v diskkrétnej forme a ak interval  $[0, T]$  nie je náhodou perióda funkcie  $x(t)$ , musíme potom meranú funkciu v intervale  $[0, T]$  urobiť periodickou predtým, ako uskutočníme transformáciu. To dosiahneme periodickým pokračovaním funkcie (obr. 5.23c). To však znamená značný zásah do štruktúry signálu. Napriek tomu tento postup má veľkú výhodu, pretože umožňuje podľa (5.25) a (5.26) rozvoj do Fourierového radu. Ak sa obmedzíme na vyhodnocovaný frekvenčný rozsah potom dostávame konečný integračný interval, resp. konečné sumy, čím dostávame jednoduchý algoritmus.

Transformácia je v oboch smeroch symetrická, až na znamienko exponentu, takže platí aj opačný myšlienkový postup.

Diskkrétne hodnoty časovej funkcie (obr.5.23c) dávajú periodické spektrum, ktoré je v dôsledku vynútenej periodickej časovej funkcie opäť diskrétnym spektrom (obr.5.23d). Pritom musí byť samozrejme overené, či takéto periodické spektrum odpovedá frekvenčnej informácii daného časového signálu.

Pri Fourierovej transformácii podľa (5.25) dostávame obojstranné čiarové spektrum so základnou frekvenciou  $f_1 = \Delta f = 1/T$ .  $f_1$  je najmenšia frekvencia v spektre a súčasne je to vzdialenosť čiar v spektre, vo frekvenčnej oblasti. Pretože spektrum pozostáva z diskrétnych čiar, je  $\Delta f$  súčasne neistotou v údajoch frekvencie v spektre.  $f_1$  je šírkou frekvenčného pásu, resp. šírkou pásu. Šírka pásu je najprv nezávislá od vzorkovacej frekvencie  $f_s$ .

Určme vzťahy medzi  $N$  diskrétnymi hodnotami  $x(n\Delta t) = x(n)$   $n = 0, 1, \dots, N-1$  časovej funkcie  $x_s(t)$  a  $N$  hodnotami spektra  $X(k\Delta f) = X(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

Rovnicu (5.26) použijeme pre diskrétnu periodickú funkciu (obr.5.23c). Každá diskrétna hodnota  $x(n)$  reprezentuje, vzhľadom na použitý krok diskretizácie  $\Delta t = \frac{1}{f_s}$ ,

Diracov impulz veľkosti  $x(n)\Delta t$  t. j. môžeme písať

$$x_s(t) = x_n \Delta t \delta(t - n\Delta t), \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Pre  $\frac{1}{T} = \Delta f$  a  $f_k = k\Delta f$  zo vzťahu (5.26) dostaneme pre  $k$ -tú spektrálnu hodnotu

$$\begin{aligned} X_k &= \Delta f \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_n \Delta t \delta(t - n\Delta t) e^{-j2\pi k \Delta f t} dt = \\ &= \Delta f \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \Delta t e^{-j2\pi k \Delta f n \Delta t}. \end{aligned}$$

Pretože  $\Delta f = \frac{1}{T}$  a  $\Delta t = \frac{T}{N}$  dostaneme

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi k \frac{n}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.31)$$

Rovnako zo vzťahu (5.25) bude

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi k \frac{n}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.32)$$

Rovnice (5.31) a (5.32) sú vzťahy pre diskretnú Fourierovú transformáciu. Predstavujú vratné jednoznačné priradenie medzi  $N$  už diskretnými hodnotami  $x(n)$  a  $X(k)$ ,  $k, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Hodnoty  $x(n)$  a  $X(k)$  majú rovnaký fyzikálny rozmer, pričom  $X(k)$  má vo všeobecnosti komplexné hodnoty s  $X(k) = X^*(-k)$  (obr.5.23d). Táto symetria sa získava zo skutočnosti, že  $x(n)$  sú reálne hodnoty a komplexné čísla  $e^{j\alpha}$  a  $e^{-j\alpha}$  sa líšia len znamienkom imaginárnych častí. Hodnota  $x(0)$  je ako súčet reálnych čísel stále reálna.

Na obr.5.23d sú znázornené hodnoty  $|X(k)|$  a  $|X(-k)|$  diskretné funkcie  $X(k)$ .  $X(k)$  je okrem toho periodická s periódou  $f_s = N\Delta f$ . Pretože platí  $X(k) = X^*(-k)$  je celkové spektrum reprezentované  $\frac{N}{2} + 1$  hodnotami  $X(0), X(1), \dots, X\left(\frac{N}{2}\right)$ .

Pretože sme vyšli z neperiodickej časovej funkcie (obr.5.23b), predstavíme odpovedajúcu spojitú amplitúdovú spektrálnu hustotu približne opäť stupňovitou funkciou  $\hat{X}(f)$  v rozsahu medzi 0 a  $\frac{1}{2}f_s = \frac{N}{2}\Delta f$  (obr.5.23e). Ako bude ukázané v 5.3.4, je to práve ten frekvenčný rozsah, v ktorom dostaneme zmysluplné informácie. Frekvencia  $f_s/2$  sa nazýva Nyquistova frekvencia.

Šestnásť nameraných hodnôt na obr.5.23 vo vzdialenosti 1 s dáva teda vo frekvenčnej oblasti medzi 0 a 0,5 Hz práve 8 spektrálnych hodnôt vo vzdialenosti 0,0625 Hz. Predpokladajme, aby sme sa viac priblížili praktickým prípadom v strojárstve, dĺžku merania  $T = 10$  s so vzorkovaním 100 Hz, čím dostaneme  $N = 1000$  hodnôt, z ktorých vo frekvenčnom rozsahu dostaneme spektrum s 500 čiarami vo frekvenčnej oblasti 0 až 50 Hz t. j. so šírkou pásu 0,1 Hz. Zdvojnásobenie času merania na 20 s by dalo  $N = 2000$  hodnôt, z ktorých by vzniklo 1000 vyhodnotiteľných spektrálnych čiar medzi 0 až 50 Hz so šírkou pásu  $1/T = 0,05$  Hz. Dosiahneme teda dvojnásobné rozlíšenie.

Ak naproti tomu pri rovnakej dobe merania  $T = 10$  s zdvojnásobíme rýchlosť vzorkovania na 200 Hz, dostaneme opäť  $N = 2000$  hodnôt, z ktorých dostaneme 1000 spektrálnych čiar. Tieto však teraz ležia medzi 0 a Nyquistovou frekvenciou 100 Hz. Šírka pásu teraz ostane nezmenená, ale zdvojnásobí sa vyhodnotiteľný rozsah frekvencií. Čas merania  $T$  teda určuje šírku pásu  $\Delta f$ , vzorkovacia frekvencia  $f_s$  najvyššiu vyhodnotiteľnú frekvenciu v spektre.

Nakoniec ešte interpretujme výrazy  $e^{\pm j2\pi k \frac{n}{N}}$  v rovniciach (5.31) a (5.32) a predstavme DFT v tvare násobenia matíc. Faktor  $e^{\pm j2\pi k \frac{n}{N}} = \cos 2\pi k \frac{n}{N} \pm j \sin 2\pi k \frac{n}{N}$  predstavuje komplexné číslo, pričom orientácia vektora je určená uhlom  $2\pi k \frac{n}{N}$ . Pre

vytvorenie spektrálnej hodnoty  $X(k)$  sa musí  $N$  reálnych hodnôt časovej funkcie  $x(n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$  vynásobiť týmito komplexnými číslami a sčítať. Celkove je teda potrebné realizovať  $N^2$  súčinov.

Súvislosti osvetlíme bližšie pre  $N = 8$ . Máme 8 reálnych hodnôt  $x(0), x(1), \dots, x(7)$  časovej funkcie, ktoré je potrebné vynásobiť s faktormi  $e^{-j 2\pi k n/8}$ ,  $k, n = 0, 1, \dots, 7$ .

Pre  $k = 0$ , alebo  $n = 0$  je  $e^{(-0)} = 1$ , takže platí

$$X(0) = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) + x(4) + x(5) + x(6) + x(7),$$

pre  $k = 1$  je

$$\text{pre } n = 1: e^{-j 2\pi/8} = \cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4} = (1 - j) \sqrt{2},$$

$$\text{pre } n = 2: e^{-j 2\pi 2/8} = \cos \frac{\pi}{2} - j \sin \frac{\pi}{2} = -j,$$

$$\text{pre } n = 3: e^{-j 2\pi 3/8} = \cos \frac{3}{4}\pi - j \sin \frac{3}{4}\pi = -(1 + j) \sqrt{2},$$

$$\text{pre } n = 4: e^{-j 2\pi 4/8} = \cos \pi - j \sin \pi = -1,$$

atď.

Ak rovnakým postupom určíme faktory pre  $k = 2, 3, \dots, 7$  je možné 8 spektrálnych hodnôt  $X(k)$ ,  $k = 0, \dots, 7$  určiť nasledovným maticovým súčinom

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (1-j)/\sqrt{2} & -j & -(1+j)/\sqrt{2} & -1 & -(1-j)/\sqrt{2} & +j & (1+j)/\sqrt{2} \\ 1 & -j & -1 & j & 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -(1+j)/\sqrt{2} & j & (1-j)/\sqrt{2} & -1 & (1+j)/\sqrt{2} & -j & -(1-j)/\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -(1-j)/\sqrt{2} & -j & (1+j)/\sqrt{2} & -1 & (1-j)/\sqrt{2} & +j & -(1+j)/\sqrt{2} \\ 1 & +j & -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \\ 1 & (1+j)/\sqrt{2} & j & -(1-j)/\sqrt{2} & -1 & -(1+j)/\sqrt{2} & -j & (1-j)/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix}.$$

Pri použití vektorového znázornenia pre komplexné čísla matice so súradnicami v zhode s obr.5.20 sú tieto vzťahy prehľadnejšie. Všetky vektory majú jednotkovú dĺžku a smerové uhly sú stále násobkom  $2\pi/8 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ . Každý riadok matice reprezentuje inú hodnotu kmitočtu. Každý stĺpec matice predstavuje iný časový okamžik.

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \uparrow & \nearrow & \rightarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \leftarrow & \nwarrow \\ \uparrow & \rightarrow & \downarrow & \leftarrow & \uparrow & \rightarrow & \downarrow & \leftarrow \\ \uparrow & \searrow & \leftarrow & \nearrow & \downarrow & \nwarrow & \rightarrow & \swarrow \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ \uparrow & \swarrow & \rightarrow & \nwarrow & \downarrow & \nearrow & \leftarrow & \searrow \\ \uparrow & \leftarrow & \downarrow & \rightarrow & \uparrow & \leftarrow & \downarrow & \rightarrow \\ \uparrow & \nwarrow & \leftarrow & \swarrow & \downarrow & \searrow & \rightarrow & \nearrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix}$$

Ak štvorcovú maticu s komplexnými číslami  $e^{-j2\pi\frac{n}{N}k}$  označíme **F** môžeme písať

$$\mathbf{X} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}, \quad (5.33)$$

kde **X** je stĺpcový vektor s ôsmimi spektrálnymi čiarami,

**x** stĺpcový vektor ôsmich diskretných hodnôt časovej funkcie.

### 5.3.3 Rýchla Fourierova transformácia (FFT)

Násobenie matíc (5.33) vyžaduje  $N^2$  komplexných násobení. Ak je  $N = 2^{10} = 1024$  (najčastejšie používané) máme  $2^{20}$  násobení. Zníženie počtu násobení z  $N^2$  na  $\log_2 N \cdot N$  sa dá dosiahnuť vhodným rozložením matice **F**. Algoritmus sa nazýva rýchla Fourierova transformácia (FFT). Rozklad matice **F** sa realizuje v dvoch krokoch. V prvom kroku iba pretransformujeme maticu **F** a vektor **x**. Predpokladáme, že  $N$  má mocninu 2 a čísla 0 až  $N-1$  vyjadrujeme ako binárne čísla. K tomu potrebujeme  $\log_2 N$  binárnych miest, ktoré sú obsadené nulou alebo jedničkou. Vyjadrenie čísla ako binárneho sa označuje Bitový vzor. Transformáciou matice a vektora nastáva tzv. Bitova reverzia.

Pre  $N = 8$  je tento postup znázornený v tab.5.1.

Bitová reverzia čísel 0 až 7

Tabuľka č.5.1

$n$ (decimálny)	$n$ (binárny)		$n$ (binárny)	$n$ (decimálny)
0	000	Bitova reverzia  $\Leftrightarrow$	000	0
1	001		100	4
2	010		010	2
3	011		110	6
4	100	$\Leftrightarrow$	001	1
5	101		101	5
6	110		011	3
7	111		111	7

Ak sa v matici **F** zamenia stĺpce a v stĺpcovom vektore **x** riadky podľa tejto schémy, výsledok **X** maticového násobenia sa vôbec nezmení. Predpokladom je iba zmena  $N$  hodnôt v pamäti počítača podľa schémy Bitovej reverzie. Z rovnice (5.33) dostaneme

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \uparrow & \downarrow & \rightarrow & \leftarrow & \nearrow & \nwarrow & \searrow & \swarrow \\ \uparrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow & \rightarrow & \rightarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ \uparrow & \downarrow & \leftarrow & \rightarrow & \searrow & \swarrow & \nearrow & \nwarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \uparrow & \downarrow & \rightarrow & \leftarrow & \nwarrow & \nearrow & \swarrow & \searrow \\ \uparrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow & \leftarrow & \leftarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \uparrow & \downarrow & \leftarrow & \rightarrow & \swarrow & \searrow & \nwarrow & \nearrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{x}.$$

Získaná matica  $\mathbf{A}$  sa v druhom kroku rozloží na súčin troch jednoduchých matíc  $\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_3$ . Bez dôkazu (ktorý sa dá získať roznásobením) pre  $N = 8$  udávame nasledovné rozloženie:

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} \uparrow & 0 & 0 & 0 & \uparrow & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \uparrow & 0 & 0 & 0 & \nearrow & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \uparrow & 0 & 0 & 0 & \rightarrow & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \uparrow & 0 & 0 & 0 & \searrow \\ \hline \uparrow & 0 & 0 & 0 & \downarrow & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \uparrow & 0 & 0 & 0 & \swarrow & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \uparrow & 0 & 0 & 0 & \leftarrow & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \uparrow & 0 & 0 & 0 & \nwarrow \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc|cccc} \uparrow & 0 & \uparrow & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \uparrow & 0 & \rightarrow & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \uparrow & 0 & \downarrow & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \uparrow & 0 & \leftarrow & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \uparrow & 0 & \uparrow & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \uparrow & 0 & \rightarrow \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \uparrow & 0 & \downarrow & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \uparrow & 0 & \leftarrow \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc|cccc} \uparrow & \uparrow & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \uparrow & \downarrow & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \uparrow & \uparrow & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \uparrow & \downarrow & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \uparrow & \uparrow & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \uparrow & \downarrow & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \uparrow & \uparrow \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \uparrow & \downarrow \end{array} \right] \cdot$$

Vytvorenie súčinu  $\mathbf{X} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{x}$  prebieha v troch etapách. V prvej etape je určené  $\mathbf{A}_3 \mathbf{x}$ .

Pretože každý riadok obsahuje len 2 prvky, sú požadované  $2N$  násobenia, z ktorých ale najmenej  $N$  sa nemusí vykonať, pretože faktor z matice  $\mathbf{A}_3$  je rovný jednej ( $\uparrow$  odpovedá  $e^0 = 1$ ).

Rovnaké tvrdenia platia pre iné (ďalšie) kroky násobenia, takže celkove sa môže vyskytnúť maximálne  $3N$  súčinov. Ďalšie operácie sú sčítavania, ktoré sú málo náročné na čas.

Pre  $N > 8$ , ak  $N$  je mocninou čísla 2, je stále možné rovnaké rozloženie, takže sa počet súčinov (násobení) zníži maximálne na  $N \cdot \log_2 N$ , pretože z  $2N$  od nuly rôznych prvkov matice  $\mathbf{A}_i$  stále najmenej  $N$  elementov je rovné 1.

Týmto algoritmom pochádzajúcim od Rungeho (1912) (pričom bol znova využitý v r. 1965 Cooleyom a Turkeyom), sa znižuje výpočtový čas nevyhnutných násobení napr. pre bežný prípad z praxe  $N = 1014 = 2^{10}$  na percentuálne  $\frac{\log_2 N}{N} = 0,0098 = 0,98\%$ .

Zavedenie tohto postupu umožnilo široké rozvinutie frekvenčnej analýzy. Všade tam, kde sa vyžaduje transformácia digitalizovaných hodnôt z časovej na frekvenčnú oblasť (alebo naopak) je nevyhnutné použiť FFT algoritmus.

Ak sa jedná o transformáciu reálnych snímaných hodnôt určitého časového signálu, je možné ďalšie zníženie časovej náročnosti, pretože imaginárne časti hodnôt sú nulové. Pri spätnej transformácii komplexného spektra sa táto výhoda stráca. Redukcia času je uvedená v tabuľke 5.2.

**Redukcia času pri FFT**

**Tabuľka č. 5.2**

$N$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$	$2^9 = 512$	$2^{10} = 1024$	$2^{11} = 2048$
$\log N/N$	0,375	0,25	0,156	0,094	0,055	0,031	0,0176	0,0098	0,0054

### 5.3.4 Dôsledky diskkrétnej Fourierovej transformácie (DFT)



Spracovanie určitej časovej funkcie ako nespojitej diskretizovanej periodickej funkcie má prirodzene určitý vplyv na presnosť dosiahnutých výsledkov. V dôsledku uvedeného je potrebné vedieť, ako spektrá odpovedajú informáciám obsiahnutým v meranom signále, resp. aké kroky je potrebné urobiť pre zníženie nepresnosti.

#### 5.3.4.1 Vyhodnotiteľný frekvenčný rozsah

Vytvorené spektrum pozostáva z  $N$  čiar, ktoré sú vzhľadom k nulovej frekvencii symetrické ( $X(k) = X^*(-k)$ ). Spektrum je okrem toho periodické s periódou  $f_s$ , takže platí

$$X(k) = X(k + N). \quad (5.34)$$

Z toho vyplývajú nasledujúce vlastnosti spektra

- hodnota  $X(N/2)$  v mieste Nyquistovej frekvencie  $\frac{1}{2}f_s$  je stále reálna, pričom platí

$$X(-N/2) = X(N/2), \quad (5.35)$$

- spektrum je symetrické aj vzhľadom k Nyquistovej frekvencii t. j. platí  $X(N/2 + r) = X^*(N/2 - r)$ ,  $r = 1, 2, \dots$

Z toho vyplýva, že  $N/2 + 1$  hodnôt

$X(0), X(1), \dots, X(N/2)$  určuje úplne spektrum znázornené na obr.5.23e.

V dôsledku periodicity spektra môžeme pri vyhodnocovaní uvažovať iba s  $N/2$  čiarami spektra medzi nulovou a Nyquistovou frekvenciou. Vyhodnotiteľný frekvenčný rozsah je určený frekvenciou vzorkovania. Frekvenčný rozsah je od nuly najviac po Nyquistovú frekvenciu  $\frac{1}{2}f_s$ .

#### 5.3.4.2 Kmitočtové skreslenie (Aliasing)

Pojmom „aliasing“ označujeme skreslenie frekvenčných zložiek vo vyhodnotiteľnom rozsahu v dôsledku zrkadlového obrazu vyšších frekvencií na Nyquistovej frekvencii

Ako už bolo uvedené, digitálne určené spektrum je symetrické vzhľadom k Nyquistovej frekvencii, t. j. platí  $X(N/2 + r) = X^*(N/2 - r)$ ,  $r = 1, 2, \dots$ . Frekvencie časového signálu nad Nyquistovou frekvenciou, t. j. vysoké frekvencie sa objavujú v dôsledku symetrických vlastností spektra tam, kde vôbec nie sú žiadne zložky frekvencie vo vyhodnocovanom signáli.

Pokiaľ pre vzorkovaciu frekvenciu  $f_s$  platí  $f_s > 2f$  ( $f$  reprezentuje frekvenciu meraného signálu) dostávame skutočné amplitúdové spektrum. Ak sa frekvencia  $f_s$  blíži k frekvencii  $f$ , vo frekvenčnom spektre sa objaví skreslenie nízkou frekvenciou  $f_s - f$ , ktorá v skutočnosti neexistuje. Tento jav sa vyskytuje často pri filmovaní na diskoch otáčajúcich sa kolies, pričom sa zdanlivo môžeme dostať aj do oblasti zápornej frekvencie s otáčaním v opačnom smere. Ďalším príkladom je pozorovanie rotujúcich častí stroboskopickou lampou, pričom pri  $f = f_s$  nastáva zdanlivý kludový stav.

Aby sa pri vyhodnocovaní meraných procesov pomocou DFT pri frekvencii časového signálu  $f > f_s/2$  nevyskytovali zdanlivé, neexistujúce nízké frekvencie, je potrebné meraný signál pred DFT filtrovať a potlačiť všetky frekvencie nad Nyquistovou frekvenciou  $f_s/2$ .

Táto požiadavka potlačenia nežiadúceho „aliasingu“ je obsiahnutá v tzv. Shannonovom teoréme vzorkovania, ktorý hovorí, že vzorkovaný signál nesmie obsahovať žiadne zložky s frekvenciou nad Nyquistovou frekvenciou, ak sa má spektrum medzi nulovou a Nyquistovou frekvenciou správne reprodukovat'. Filtrovanie sa realizuje tzv. antialiasingovými filtrami. Potlačením týchto zložiek frekvencií sa zúži oblasť vyhodnotiteľných frekvencií znova medzi nulovou hodnotu a hodnotu vzorkovacej frekvencie. Oblasťou skúmaných frekvencií je teda daná aj vzorkovacia frekvencia.

Chyba vzorkování může ovšem být ještě daleko horší. Pokud se totiž v původním spojitém signálu vyskytuje frekvence vyšší než je polovina vzorkovací frekvence (nazývaná též [[Nyquistova frekvence]]), dojde, jak praví [[Shannonův teorém]], k úplnému a nenávratnému zkreslení signálu díky jevu nazývanému se [[aliasing]]. Aliasingu se dá zabránit jedině takzvaným antialiasing [[Filtr (zpracování signálu)|filtrem]], což je [[dolní propust]] zařazená před převodníkem. Ta nedovolí frekvencím vyšším než je Nyquistova frekvence vstoupit do převodníku.

Například u záznamu hudby na [[Kompaktní disk|CD]] je použita vzorkovací frekvence 44,1kHz, takže na CD mohou být zachyceny frekvence zhruba do 22&nbsp;kHz. Vzhledem k tomu, že rozsah frekvencí slyšitelný [[ucho|lidským uchem]] se uvádí jako 20Hz - 16kHz, je tak na CD možno zaznamenat slyšitelné spektrum v celé šíři.

V telekomunikacích se používá vzorkování 8 kHz (standardní telefonní pásmo je od 0,3 do 3,4 kHz) takže nejvyšší přenesená frekvence je 4 kHz to je pro přenos hlasu dostačující.

## FILTRÁCIA

**Filter** je obvod, ktorý má rôzne zosilnenie pri rôznych frekvenciách. Prepúšťa signály, resp. ich harmonické zložky iba v určitom pásme frekvencie a to s malým útlmom (priepustné pásmo) [10]. V nepriepustnom pásme je útlm výrazný. Často sa používajú v rádiách, počítačoch, riadiacich systémoch atď.

Filtre poznáme [10]:

- ideálne
- analógové (pasívne) – RC, LC, RLC
- digitálne (aktívne) – zosilňovače, funčné bloky

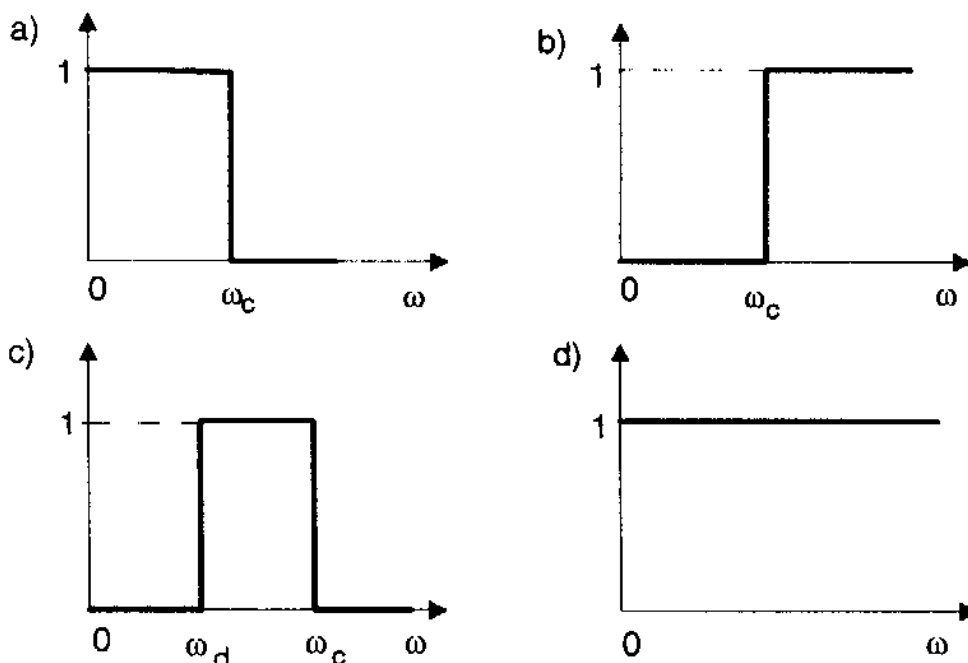
**Ideálny filter** je sústava, ktorá neskresluje tvar vstupného signálu. Za neskreslený signál považujeme signál, ktorý sa od pôvodného líši iba zosilnením a oneskorením  $y(t) = Kx(t - t_d)$

Aplikujeme Fourierovu transformáciu

$$Y(\omega) = K \cdot e^{-j\omega t_d} X(\omega) \quad (8.0)$$

pri frekvenciách, kde je nenulové spektrum vstupného signálu:

- amplitúdová charakteristika ideálneho filtra musí byť konštantná  $|H(\omega)| = |K|$
- fázová charakteristika musí byť úmerná frekvencii  $\arg H(\omega) = -\omega t_d + n\pi$



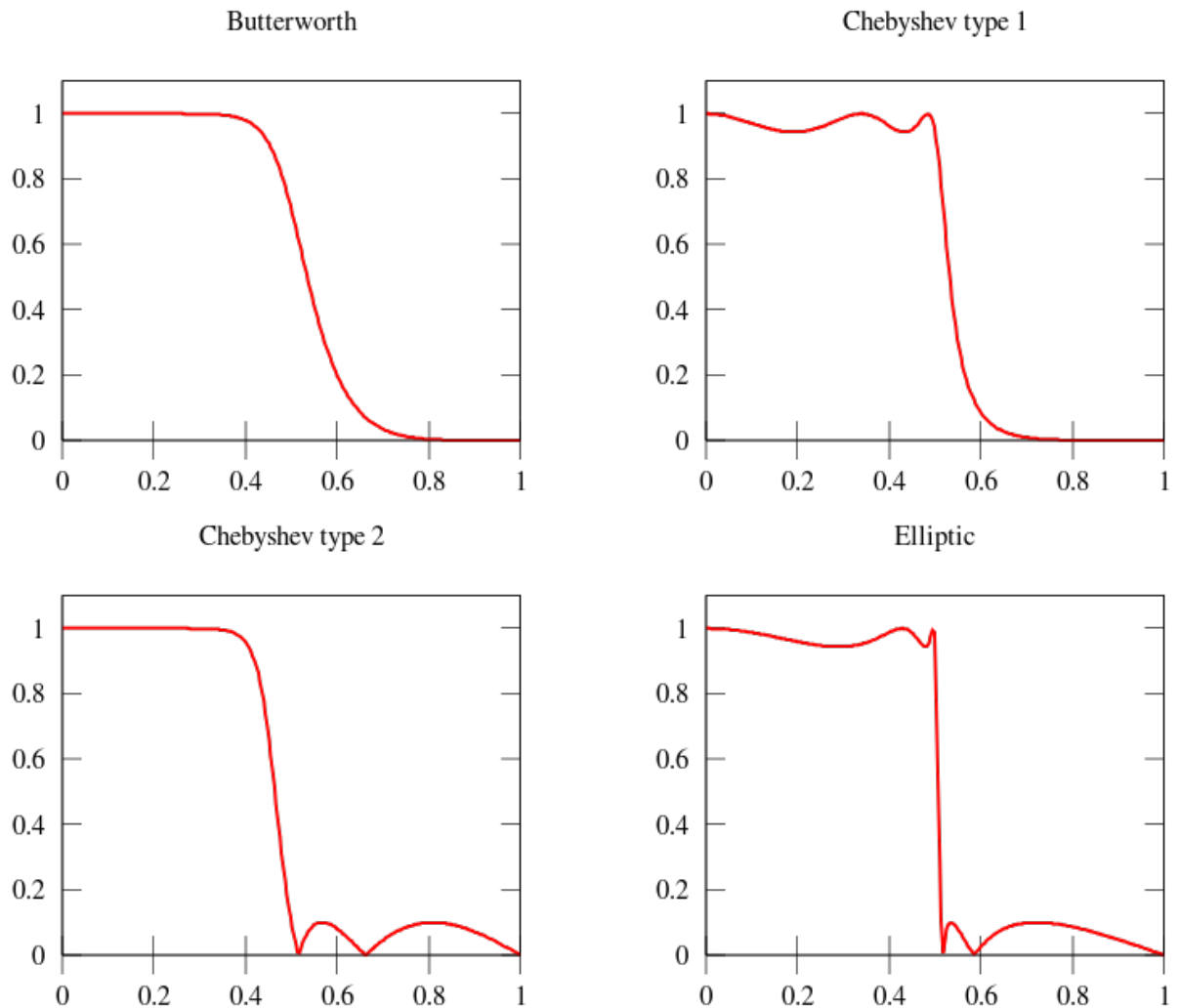
Obr. 8.1 Frekvenčné charakteristiky ideálnych pásmových filtrov [10]  
a) dolnopriepustný filter (low-pass), b) hornopriepustný filter (high-pass), c) pásmová priepusť (band-pass), d) celopriepustný filter (all-pass)

## Typy analógových filtrov

Čebyševov filter , má najlepšie priblíženie k ideálnej odpovedi hocikákeho filter pre špecifikovanú objednávku a vlnky.

- Butterworthov filter , má maximálny plochý kmitočtový odozva.
- Besselov filter , má maximálne ploché fázové oneskorenie .
- Eliptický filter , má najstrmší prerušenie hocikákeho filter pre špecifikovanú objednávku a vlnky.

Porovnanie dolnopriepustných filtrov 5. rádu,  $f_c$  – amplitúda signálu klesne na 0,707

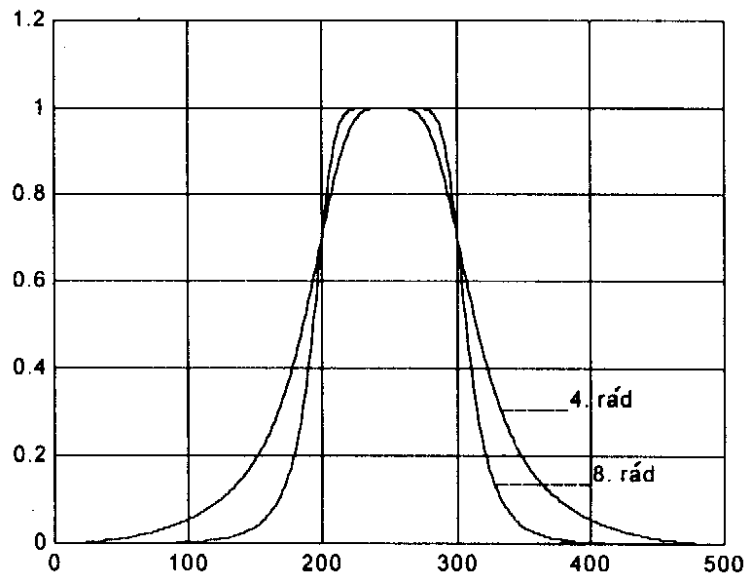


1. **Butterworthov filter** (najrýchlejšie odreže a má najlepšiu aproximáciu vzhľadom k ideálnemu filteru). Charakteristická funkcia filtrácie, teda modul v normovanom tvare je:

$$F(\Omega^2) = \beta_0 + \beta_1 \Omega^2 + \dots + \beta_n \Omega^{2n} \quad (8.6)$$

resp.  $F(\Omega^2) = 1 + \Omega^{2n}$

n-rád filtra



Obr. 8.2 Amplitúdovo frekvenčná charakteristika Butterworthovho filtra 4. a 8. rádu [10]

Póly Butterworthovho filtra ležia na jednotkovej kružnici a jeho amplitúdová charakteristika monotónne klesá v pásme prepúšťania z hodnoty 1 pri  $\Omega=0$  na hodnotu  $1/\sqrt{2}$  pre  $\Omega=1$  pre všetky hodnoty  $n$ . So zvyšujúcim sa rádom filtra sa amplitúdová charakteristika Butterworthovho filtra približuje k ideálnej krivke (obr. 8.2). Pásmo prechodu však nie je dostatočne úzke.

$$|H_B(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^{2n}}} \quad (8.7)$$

**2. Čebyševov filter** – charakteristická funkcia filtrácie, teda modul v normovanom tvare je:

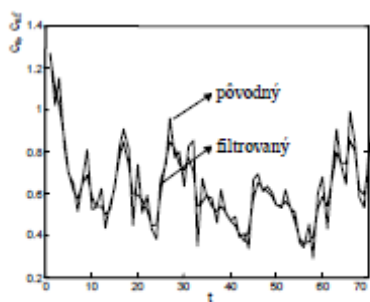
$$F(\Omega^2) = 1 + \varepsilon^2 C_n^2(\Omega) \quad (8.8)$$

$n$ -rád filtra,  $\varepsilon$ -parameter, ktorý udáva mieru zvlnenia

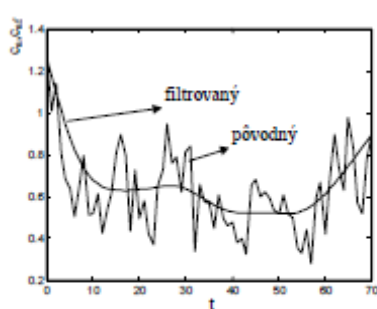
$C_n$ -Čebyševov polynóm stupňa  $n$   $C_n(\omega) = \cos(n \cdot \cos^{-1} \omega)$

Čebiševov filter (Chebisev I), Lowpass, s parametrami:

- usporiadanie (filter order): 1
- hranica prechodového pásma frekvencie (passband edge frequency rads/sec): 40
- prechodové pásmo šumu v dB: 2

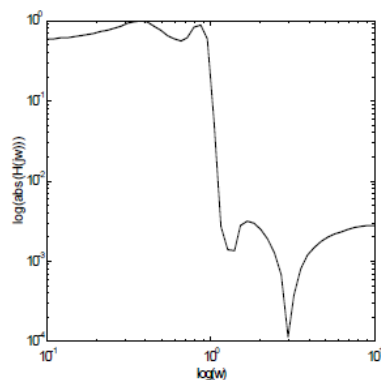
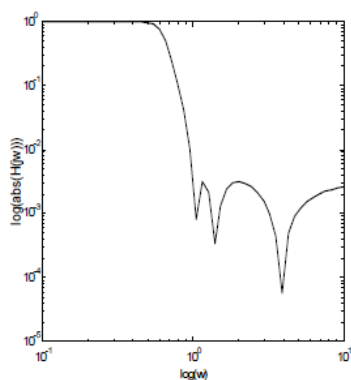
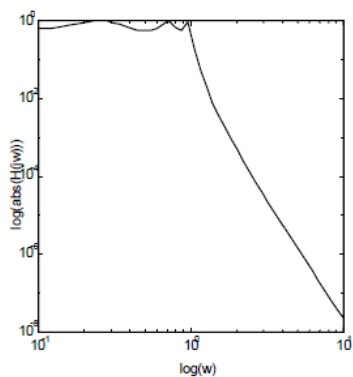
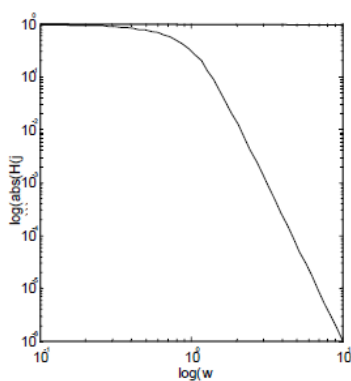
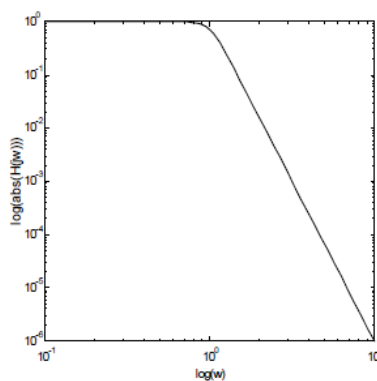
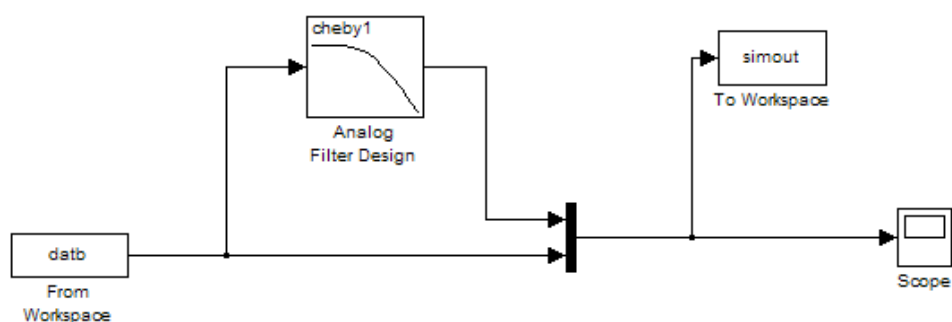


Obr. 13 Filtrácia FIR filtrom 1. rádu s  $\omega_c=0.1$

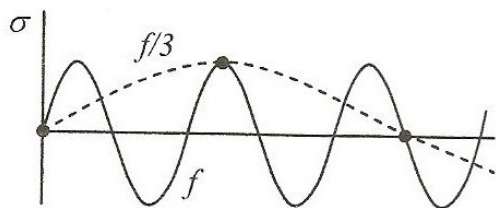


Obr. 14 Filtrácia FIR filtrom 20. rádu s  $\omega_c=0.05$ .

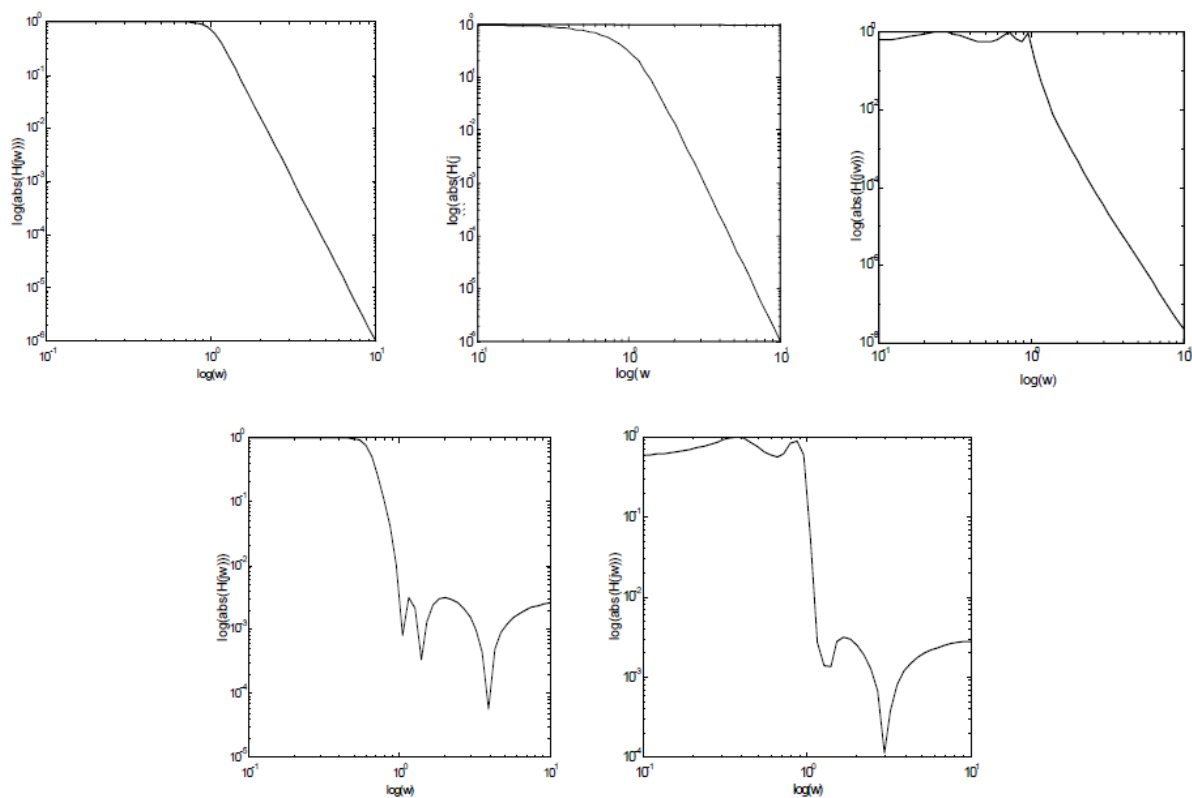
**Kalmanov filter** – minimalizuje rozptyl chyby v lineárnych systémoch (meranie polohy, navigácia polohy)



Obr. 6 Amplitúdové charakteristiky analógových filtrov 6. rádu v poradí: Butterworthov, Besselov, Čebyševov, Čebyševov inverzný a eliptický.



$f > f_{vz}$  je chybné interpretovaný. V dôsledku riedkeho vzorkovania sa táto zložka signálu započítala k frekvenciám  $f/3$  namiesto frekvencie  $f$



Obr. 6 Amplitúdové charakteristiky analógových filtrov 6. rádu v poradí:

Butterworthov, Besselov, Čebyševov,

Čebyševov inverzný a eliptický.